Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана

С.И. Савельев, С.В. Синегуб

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

(уравнения гиперболического и параболического типов)

Москва 1977

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом.

Рассмотрены и одобрены кафедрой высшей математики 30/IX-77 г., Методической комиссией факультета ОТ 7/X-77 г. и Учебно-методическим управлением.

Рецензент д.т.н. проф. Р.С. Судаков

Редактор Н.Г. Ковалевская Корректор В.М.Царев

Заказ 1875 Объем 2 п.л. Тираж 1000 экз.
Бесплатно Подписано к печати 14/XII-77 г.

Ротапринт МВТУ, 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

ЗАДАЧА 1

<u>Приведение к каноническому виду линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в случае двух независимых переменных. Нахождение общего решения уравнения. Решение задачи Коши для уравнений гиперболического и параболического типов.</u>

Решение задачи приведения к каноническому виду линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в случае двух независимых переменных излагается в учебных пособиях по уравнениям математической физики, например [1, 2, 3]. Приведенные к каноническому виду уравнения гиперболического и параболического типов в простейших случаях решаются. В предлагаемых задачах они решаются интегрированием с понижением порядка уравнений. Получаются общие решения, содержащие произвольные функции от канонических переменных. После подстановки выражений канонических переменных через первоначальные x и y получаем аналитические формулы общих решений заданных линейных уравнений, в которые входят произвольные функции от промежуточных аргументов.

При решении задачи Коши в общее решение и его производную по аргументу x или y подставляются заданные начальные условия. Получается система двух уравнений на две неизвестные функции. Одно из уравнений дифференциальное. Из этой системы определяются две функции (на промежуточном этапе – произвольные функции). Заменяя в общем решении произвольные функции найденными конкретными функциями, получаем решение задачи Коши.

<u>Пример 1.</u> Найти решение уравнения

$$(3+\cos^2 y)z''_{xx} - 2\sin y \cdot z''_{xy} - z''_{yy} + (2+\sin y - \cos y)z'_x + z'_y = 0 \qquad (1)$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$z|_{y=0} = x^2, \quad z'_y|_{y=0} = x. \qquad (2)$$

По коэффициентам при вторых производных определяем тип уравнения

$$A\cdot C - B^2 = (3+\cos^2 y)\cdot(-1) - (-\sin y)^2 = -4 < 0$$

Уравнение (1) гиперболического типа. Составляем характеристическое уравнение

$$(3+\cos^2 y)(dy)^2 + 2\sin y\cdot dx\cdot dy - (dx)^2 = 0$$

Решаем это квадратное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \sin y \pm 2 .$$

Находим общие интегралы каждого из полученных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

$$x - 2y + \cos y = C_1 , \quad x + 2y + \cos y = C_2 .$$

Левые части найденных общих интегралов берут в качестве новых переменных

$$\xi = x - 2y + \cos y , \quad \eta = x + 2y + \cos y . \qquad (3)$$

Новые переменные ξ и η называют каноническими, или характеристическими. Разрешимость уравнений (3) относительно x и y доказана для уравнений гиперболического типа. Для преобразования заданного уравнения (1) к каноническому виду вычисляем производные первого и второго порядков по переменным x и y, выражая их через производные по переменным ξ и η, рассматриваемым как промежуточные переменные, с применением правил дифференцирования сложных функций. Получаем следующие выражения для производных первого порядка:

$$z'_x = z'_\xi \cdot 1 + z'_\eta \cdot 1 , \quad z'_y = z'_\xi \cdot (-2 - \sin y) + z'_\eta \cdot (2 - \sin y)$$

и соответственно, для производных второго порядка

$$z''_{xx} = z''_{\xi\xi} + 2 \cdot z''_{\xi\eta} + z''_{\eta\eta} ,$$

$$z''_{xy} = z''_{\xi\xi}(-2 - \sin y) + z''_{\xi\eta}(-2 - \sin y + 2 - \sin y) + z''_{\eta\eta}(2 - \sin y)$$

$$z''_{yy} = z''_{\xi\xi}(-2 - \sin y)^2 + 2 \cdot z''_{\xi\eta}(-2 - \sin y)(2 - \sin y) +$$
$$+ z''_{\eta\eta} \cdot (2 - \sin y)^2 + z'_\xi \cdot (-\cos y) + z'_\eta \cdot (-\cos y) .$$

Подставляем полученные выражения первых и вторых производных по x и y в уравнение (1) и группируем слагаемые с общими множителями $z''_{\xi\xi}$, $z''_{\xi\eta}$ и т.д.
Получаем уравнение

$$16 \cdot z''_{\xi\eta} + 4 z'_\eta = 0 .$$

Заметим, что коэффициенты при $z''_{\xi\xi}$ и $z''_{\eta\eta}$ должны обращаться в нуль. Их можно было бы и не подсчитывать. Но при решении задачи возможны ошибки. Рекомендуется подсчитывать также и коэффициенты при $z''_{\xi\xi}$, $z''_{\eta\eta}$. Необращение в нуль хотя бы одного из этих коэффициентов показывает наличие ошибок. Следует просмотреть ход решения задачи, отыскать и исправить ошибки.

Разделив все члены уравнения на коэффициент при $z''_{\xi\eta}$, получаем канонический вид уравнения гиперболического типа (1)

$$z''_{\xi\eta} + \frac{1}{4} \cdot z'_\eta = 0 .$$

Это уравнение легко решается. Обозначив $z'_\eta = u$, получаем уравнение первого порядка для функции u

$$\frac{1}{u} \cdot u'_\xi = -\frac{1}{4} .$$

Интегрируем обе части равенства по переменному ξ (при этом войдет слагаемое – произвольная функция другого переменного η)

$$\ln u = -\frac{1}{4} \xi + \ln \varphi_1(\eta) .$$

Потенцируем равенство и заменяем u

$$u = z'_\eta = \varphi_1(\eta) \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi} .$$

Обе части полученного равенства интегрируем по переменному η

$$z = e^{-\frac{1}{4}\xi} \int \varphi_1(\eta) d\eta = e^{-\frac{1}{4}\xi} \cdot \varphi(\eta) + \psi(\xi)$$

Интеграл от произвольной функции $\varphi_1(\eta)$ есть также произвольная функция $\varphi(\eta)$ того же аргумента. Слагаемое $\psi(\xi)$ есть произвольная функция другого аргумента ξ. Таким образом, общее решение канонического уравнения

$$z = e^{-\frac{1}{4}\xi} \cdot \varphi(\eta) + \psi(\xi) .$$

Подставляя выражения (3) канонических переменных, получим общее решение исходного уравнения (1)

$$z = e^{-\frac{1}{4}(x - 2y + \cos y)} \cdot \varphi(x + 2y + \cos y) + \psi(x - 2y + \cos y) \quad (4)$$

Остается выделить из всех решений, представляемых формулой (4), то, которое удовлетворяет начальным условиям (2). Дифференцируем функцию z по переменному y

$$z'_y = e^{-\frac{1}{4}(x - 2y + \cos y)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin y\right) \cdot \varphi(x + 2y + \cos y) +$$
$$+ e^{-\frac{1}{4}(x - 2y + \cos y)} \cdot \varphi'(x + 2y + \cos y) \cdot (2 - \sin y) +$$
$$+ \psi'(x - 2y + \cos y) \cdot (-2 - \sin y)$$

и подставляем в полученное равенство и равенство (4) $y = 0$.
Получаем два условия

$$e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi(x+1)+\psi(x+1)=x^2, \qquad (5)$$
$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi(x+1)+2e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi'(x+1)-2\psi'(x+1)=x$$

Это система двух дифференциальных уравнений на две неизвестные функции. Система специфического вида. Первое уравнение содержит только функции и не содержит их производных. Второе уравнение содержит и функции и их производные. Дифференцируем первое уравнение

$$-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi(x+1)+e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi'(x+1)+\psi'(x+1)=2x.$$

Умножив обе части полученного уравнения на 2 и сложив с соответственными частями второго уравнения (5), исключим функцию ψ и получим дифференциальное уравнение для функции φ

$$4\cdot e^{-\frac{1}{4}(x+1)}\cdot\varphi'(x+1)=5x.$$

Находим функцию $\varphi(x+1)$ интегрированием

$$\varphi(x+1)=\frac{5}{4}\int x\cdot e^{\frac{1}{4}(x+1)}\cdot dx=e^{\frac{1}{4}(x+1)}\cdot(5x-20)+C.$$

Функцию $\psi(x+1)$ находим теперь из первого уравнения (5)

$$\psi(x+1)=x^2-5x+20-C\cdot e^{-\frac{1}{4}(x+1)}.$$

Окончательно функции φ и ψ получим, заменяя $(x+1)$ через t,

$$\varphi(t)=e^{\frac{1}{4}t}\cdot(5t-25)+C,\quad \psi(t)=t^2-7t+26-C\cdot e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Решение задачи Коши получаем подстановкой в формулу (4) найденных функций, заменяя при этом аргумент t у функции φ выражением $(x+2y+\cos y)$, а у функции ψ выражением $(x-2y+\cos y)$

$$z=e^{-\frac{1}{4}(x-2y+\cos y)}\cdot\left\{e^{\frac{1}{4}(x+2y+\cos y)}\cdot\left[5(x+2y+\cos y)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-25\right]+C\right\}+\left\{(x-2y+\cos y)^2-7(x-2y+\cos y)+\right.$$
$$\left.+26-C\cdot e^{-\frac{1}{4}(x-2y+\cos y)}\right\}.$$

После раскрытия скобок и возможных упрощений получаем следующее выражение функции, являющейся решением задачи Коши:

$$z=5\cdot e^{y}(x+2y+\cos y-5)+(x-2y+\cos y)^2-$$
$$-7(x-2y+\cos y)+26.$$

Правильность решения легко проверяется. Вычислив все производные первого и второго порядков и подставив в уравнение (1), получаем тождество. Подставляя в функцию z и ее частную производную по y, значение $y=0$, убеждаемся в выполнении начальных условий. Решение правильное.

<u>Пример 2.</u> Найти решение уравнения

$$y^6\cdot z''_{xx}-2y^3\cdot z''_{xy}+z''_{yy}-\frac{3}{y}z'_y=0, \qquad (6)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$z/_{y=2}=x, \quad z'_y/_{y=2}=x^2. \qquad (7)$$

Мы имеем уравнение параболического типа

$$AC-B^2=y^6\cdot 1-(-y^3)^2\equiv 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$y^6(dy)^2+2y^3\cdot dx\,dy+(dx)^2=0.$$

Имеем только одно уравнение первого порядка (первой степени)

$$y^3dy+dx=0$$

и, следовательно, один общий интеграл

$$x+\frac{1}{4}y^4=C.$$

Одно каноническое переменное определено

$$\xi=x+\frac{1}{4}y^4.$$

Второе каноническое переменное для уравнения параболического типа может быть произвольной функцией от x и y. Но вместе функции $\xi(x;y)$ и $\eta(x;y)$ должны разрешаться относительно x и y. Следует выбирать функцию $\eta(x;y)$ наиболее простой, чтобы разрешимость функций $\xi(x;y)$ и $\eta(x;y)$ относительно x и y была наиболее легкой. В данном примере наиболее простой будет функция $\eta=y$.

Производные первого порядка от функции z по x и y выражаются через производные по ξ и η равенствами

$$z'_x = z'_\xi, \quad z'_y = z'_\xi \cdot y^3 + z'_\eta \cdot 1,$$
производные второго порядка – равенствами
$$z''_{xx} = z''_{\xi\xi}, \quad z''_{xy} = z''_{\xi\xi} \cdot y^3 + z''_{\xi\eta},$$
$$z''_{yy} = z''_{\xi\xi} \cdot (y^3)^2 + 2 \cdot z''_{\xi\eta} \cdot y^3 + z''_{\eta\eta} + z'_\xi \cdot 3y^2.$$
Подставляя их в уравнение (6), получаем
$$z''_{\eta\eta} - \frac{3}{y} z'_\eta = 0.$$
Окончательный канонический вид уравнения получается после замены в коэффициентах уравнения x и y их выражениями через ξ и η. Каноническое уравнение
$$z''_{\eta\eta} - \frac{3}{\eta} z'_\eta = 0$$
легко решается. Подстановкой $z'_\eta = u$ оно приводится к уравнению первого порядка относительно функции u
$$\frac{1}{u} u'_\eta = \frac{3}{\eta}.$$
Интегрируя обе части равенства по переменному η, имеем
$$\ln u = 3 \ln \eta + \ln \varphi(\xi).$$
Потенцируя последнее равенство и заменяя u через z'_η
$$z'_\eta = \eta^3 \cdot \varphi(\xi),$$
еще раз интегрируем по переменному η и находим общее решение
$$z = \frac{1}{4} \eta^4 \cdot \varphi(\xi) + \psi(\xi).$$
Заменив переменные ξ и η их выражениями через x и y, получаем общее решение первоначального уравнения (6)
$$z = \frac{1}{4} y^4 \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{4} y^4\right) + \psi\left(x + \frac{1}{4} y^4\right) \qquad (8)$$
Для выделения из него решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям (7), дифференцируем функцию (8) по y
$$z'_y = y^3 \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{4} y^4\right) + \frac{1}{4} y^4 \varphi'\left(x + \frac{1}{4} y^4\right) y^3 + \psi'\left(x + \frac{1}{4} y^4\right) \cdot y^3$$
и подставляем в функцию (8) и ее производную значение $y = 2$. Учитывая условия (7), получаем два соотношения

$$4 \cdot \varphi(x+4) + \psi(x+4) = x,$$
$$8 \cdot \varphi(x+4) + 32 \varphi'(x+4) + 8 \psi'(x+4) = x^2.$$
Дифференцируя первое равенство по x, умножаем обе части полученного равенства на 8 и вычитаем соответственно из второго равенства. Получаем
$$8 \cdot \varphi(x+4) = x^2 - 8,$$
т.е.
$$\varphi(x+4) = \frac{1}{8} x^2 - 1.$$
Затем легко находим вторую функцию
$$\psi(x+4) = x - \frac{1}{2} x^2 + 4.$$
В найденных функциях делаем подстановку $x + 4 = t$,
$$\varphi(t) = \frac{1}{8}(t-4)^2 - 1, \quad \psi(t) = -\frac{1}{2}(t-4)^2 + t.$$
Решение задачи Коши получаем, подставляя в формулу (8) найденные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ с заменой в них аргумента t суммой $x + \frac{1}{4} y^4$
$$z = x + \left(x + \frac{1}{4} y^4 - 4\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{32} y^4 - \frac{1}{2}\right).$$
Правильность решения проверяется. Найденная функция удовлетворяет начальным условиям (7) и обращает уравнение (6) в тождество.

<u>Домашнее задание. Задача 1</u>

Найти решения линейных уравнений второго порядка, удовлетворяющие заданным начальным условиям (задача Коши).

1	$4y^2 \cdot z''_{xx} + 2(1-y^2) z''_{xy} - z''_{yy} - \frac{4y}{1+y^2} \cdot z'_x + \frac{2y}{1+y^2} z'_y = 0$ $z\|_{y=1} = x, \quad z'_y\|_{y=1} = 0$
2	$z''_{xx} + 2 z''_{xy} - 3 z''_{yy} = 0$ $z\|_{y=0} = 3x^2, \quad z'_y\|_{y=0} = x$

3 $z''_{xx} + 2\cos x \cdot z''_{xy} - \sin^2 x \cdot z''_{yy} - \sin x \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = 1$

4 $z''_{xx} - 2x \cdot z''_{xy} + x^2 \cdot z''_{yy} - z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = y$

5 $z''_{xx} - 2 \cdot x \cdot z''_{xy} + x^2 \cdot z''_{yy} + z'_x - (1+x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = y$

6 $z''_{xx} - 2 \cdot x \cdot z''_{xy} + x^2 \cdot z''_{yy} - z'_x + (x-1) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = y^2$

7 $y^2 \cdot z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + z'_x = 0$

$z|_{y=0} = x^3$, $z'_y|_{y=0} = -x$

8 $y^2 \cdot z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + (1+y) z'_x + z'_y = 0$

$z|_{y=0} = -x$, $z'_y|_{y=0} = \sin x$

9 $y^2 \cdot z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + (1-y) z'_x - z'_y = 0$

$z|_{y=0} = x^2$, $z'_y|_{y=0} = x$

10 $z''_{xx} + 2x^2 \cdot z''_{xy} + x^4 \cdot z''_{yy} + 2x \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = y^2$

11 $z''_{xx} + 2x^2 \cdot z''_{xy} + x^4 \cdot z''_{yy} + z'_x + (x^2+2x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = y$

12 $z''_{xx} + 2 \cdot x^2 \cdot z''_{xy} + x^4 \cdot z''_{yy} - z'_x + (2x - x^2) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = \sin y$, $z'_x|_{x=0} = y$

13 $z''_{xx} + 2 \cdot z''_{xy} - 3 \cdot z''_{yy} + z'_x - z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = 0$

14 $z''_{xx} + 2z''_{xy} - 3z''_{yy} + z'_x + 3z'_y = 0$

$z|_{x=0} = -\frac{1}{6} y^2$, $z'_x|_{x=0} = y$

15 $z''_{xx} + 2\sin x \cdot z''_{xy} + \sin^2 x \cdot z''_{yy} + \cos x \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = y^3$

16 $z''_{xx} + 2 \sin x \cdot z''_{xy} + \sin^2 x \cdot z''_{yy} + z'_x + (\sin x + \cos x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = y^2$

17 $z''_{xx} + 2\sin x \cdot z''_{xy} + \sin^2 x \cdot z''_{yy} - z'_x + (\cos x - \sin x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y^2$, $z'_x|_{x=0} = y$

18 $z''_{xx} - 2\cos x \cdot z''_{xy} - (3 + \sin^2 x) z''_{yy} + \sin x \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = y^2$

19 $z''_{xx} - 2\sin x \cdot z''_{xy} - \cos^2 x \cdot z''_{yy} + z'_x + (1 - \cos x - \sin x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = y$, $z'_x|_{x=0} = 0$

20 $z''_{xx} - 2\sin x \cdot z''_{xy} - \cos^2 x \cdot z''_{yy} + 2 \cdot z'_x - (2 + \cos x + 2\sin x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = 2y$, $z'_x|_{x=0} = 1$

21 $z''_{xx} - 2\sin x \cdot z''_{xy} - \cos^2 x \cdot z''_{yy} - z'_x + (\sin x - \cos x - 1) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = 3y$, $z'_x|_{x=0} = 5$

22 $z''_{xx} - 2\sin x \cdot z''_{xy} - \cos^2 x \cdot z''_{yy} - 2 \cdot z'_x + (2\sin x + 2 - \cos x) z'_y = 0$

$z|_{x=0} = \frac{1}{2} y^2$, $z'_x|_{x=0} = 1$

23 $y^2 \cdot z''_{xx} - 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} - \frac{1}{y} z'_y = 0$

$z|_{y=1} = x$, $z'_y|_{y=1} = x^2$

24 $y^2 \cdot z''_{xx} - 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + z'_x - \frac{2}{y} z'_y = 0$

$z|_{y=1} = x^2$, $z'_y|_{y=1} = x$

25 $y^2 \cdot z''_{xx} - 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} - z'_x = 0$

$z|_{y=1} = (x + \frac{1}{2})^2$, $z'_y|_{y=1} = 0$

26 $-x \cdot z''_{xx} + 4x^3 \cdot z''_{yy} + (1 - 4x^2) z'_x + 8x^3 \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=1} = y$, $z'_x|_{x=1} = 3$

27 $-x \cdot z''_{xx} + 4 \cdot x^3 \cdot z''_{yy} + (1 + x^2) z'_x + 2x^3 \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=1} = y^2$, $z'_x|_{x=1} = 0$

28 $-x \cdot z''_{xx} + 9 \cdot x^5 \cdot z''_{yy} + (2 + 2x^3) z'_x + 6x^5 \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=1} = 2y$, $z'_x|_{x=1} = 0$

29 $-x \cdot z''_{xx} + 9x^5 \cdot z''_{yy} + (2 - 6x^3) z'_x + 18x^5 \cdot z'_y = 0$

$z|_{x=1} = 0$ $z'_x|_{x=1} = y$

30 $y^4 \cdot z''_{xx} + 2y^2 \cdot z''_{xy} + z''_{yy} - \frac{2}{y} z'_y = 0$

$z|_{y=1} = \frac{1}{3} x^3$, $z'_y|_{y=1} = 2x^2$

ЗАДАЧА 2

Решение методом Фурье смешанной задачи для линейного уравнения 2-го порядка гиперболического типа в случае двух независимых переменных.

Рассматривается типовая задача. Можем считать, что это задача о плоских колебаниях ограниченной однородной струны в среде без сопротивления. Концы струны или закреплены или могут перемещаться в плоскости колебаний по перпендикулярам к линии невозмущенного положения струны по определенным законам, зависящим от времени. На струну действует непрерывно распределенная внешняя сила. Решение задачи о движении точек струны сводится к решению линейного уравнения 2-го порядка гиперболического типа от двух независимых переменных x и t вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x;t) \qquad (9)$$

с заданными начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \quad 0 \le x \le S \qquad (10)$$

и заданными граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \varphi(t), \quad u\Big|_{x=S} = \psi(t) \quad 0 \le t \le T. \qquad (11)$$

Функция $u(x;t)$ есть смещение точки струны с абсциссой x в момент времени t в направлении, перпендикулярном оси x, отрезком $0 \le x \le S$ которой изображается ограниченная струна в невозмущенном состоянии. При решении задачи мы рассмотрим только форму решения, не доводя решения до цифровых результатов. Поэтому некоторые параметры задачи (длина струны S, плотность ρ, начальное натяжение T_0, а значит, и $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$) остаются выраженными буквенно, не задаются численно. Смещения точек струны предполагаются достаточно малыми, соответственно малыми предполагаются и функции $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в начальных и граничных условиях, и свободный член $q(x;t)$ в уравнении. Малость этих функций выразим с помощью буквенных коэффициентов – множителей α, β, μ, ν, λ. Эти коэффициенты имеют соответствующую размерность и в конкретных задачах с числовыми данными малые числовые значения. Кроме того, функции в начальных и граничных условиях должны удовлетворить условиям:

$$f(0) = \varphi(0) = u(0;0), \quad f(S) = \psi(0) = u(S;0),$$
$$F(0) = \varphi'(0) = u'_t(0;0), \quad F(S) = \psi'(0) = u'_t(S;0). \qquad (12)$$

Последовательность этапов решения задачи изложена в учебных пособиях [1, 2, 3]. Решение выражается следующей формулой:

$$u(x;t) = \frac{x}{S}\psi(t) + \frac{S-x}{S}\varphi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{S} \cdot \Big\{ A_n \cos\frac{n\pi a}{S}t +$$
$$+ B_n \sin\frac{n\pi a}{S}t - \frac{2}{n\pi}\left[\varphi(0) - (-1)^n \psi(0)\right]\cos\frac{n\pi a}{S}t - \frac{2S}{a(n\pi)^2} \times$$
$$\times \left[\varphi'(0) - (-1)^n \psi'(0)\right] \cdot \sin\frac{n\pi a}{S}t + \frac{S}{n\pi a}\int_0^t q_n(\tau) \cdot \sin\frac{n\pi a}{S}(t-\tau)\,d\tau -$$
$$- \frac{2S}{a(n\pi)^2}\int_0^t \left[\varphi''(\tau) - (-1)^n \psi''(\tau)\right] \cdot \sin\frac{n\pi a}{S}(t-\tau)\,d\tau \Big\}. \qquad (13)$$

Числовые коэффициенты A_n, B_n и функции $q_n(t)$ вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{2}{S}\int_0^S f(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{S}\,dx, \quad B_n = \frac{S}{n\pi a} \cdot \frac{2}{S}\int_0^S F(x) \sin\frac{n\pi x}{S}\,dx,$$
$$q_n(t) = \frac{2}{S}\int_0^S q(x;t)\,\sin\frac{n\pi x}{S}\,dx \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (14)$$

Для примера рассмотрим задачу с заданными функциями в начальных и граничных условиях

$$f(x) = \alpha\frac{x(2x-S)(S-x)}{S^3}, \quad F(x) = \beta \cdot \frac{x}{S}, \quad 0 \le x \le S,$$
$$\varphi(t) = 0, \quad \psi(t) = \nu \cdot t \qquad 0 \le t \le T.$$

Чтобы удовлетворить условиям (12), примем $\nu = \beta$. Свободный член уравнения (9) зададим в виде

$$q(x;t) = \lambda\frac{x(S-x)}{S^2}t.$$

Вычисляем коэффициенты A_n, B_n и функции $q_n(t)$ по формулам (14). Для нашего примера

$$A_n = \frac{12\alpha}{(n\pi)^3}\left[1 + (-1)^n\right], \quad B_n = \frac{2 \cdot S \cdot \beta}{a(n\pi)^2}(-1)^{n+1},$$

$$g_n(t)=\frac{4\lambda}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]\cdot t .$$

Затем вычисляем интегралы

$$\frac{S}{n\pi a}\int_0^t \frac{4\lambda}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]\tau\cdot\sin\frac{n\pi a}{S}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{4\lambda S^2}{a^2(n\pi)^5}\left[1-(-1)^n\right]\cdot\left[t-\frac{S}{an\pi}\sin\frac{n\pi a}{S}t\right].$$

Подставляем найденные величины и выражения в формулу (13), приводим подобные члены и группируем слагаемые для четных и нечетных значений n. Решение задачи записывается в виде

$$u(x;t)=\frac{\nu}{S}\cdot x\cdot t-\frac{3\alpha}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{2\pi kx}{S}\cdot\cos\frac{2\pi kat}{S}+$$

$$+\frac{8\lambda\cdot S^2}{a^2\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^5}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{S}\left[t-\frac{S}{(2k-1)\pi a}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi at}{S}\right].$$

При решении задач рекомендуется пользоваться следующей формулой, применимой к многочленам:

$$\int_0^S\Phi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{S}dx=-\frac{S}{n\pi}\Phi(x)\cos\frac{n\pi x}{S}\Big|_0^S+\left(\frac{S}{n\pi}\right)^3\times$$

$$\times\Phi''(x)\cos\frac{n\pi x}{S}\Big|_0^S-\left(\frac{S}{n\pi}\right)^5\Phi^{(IV)}(x)\cos\frac{n\pi x}{S}\Big|_0^S+\dots+(-1)^{k+1}\times$$

$$\times\Phi^{(2k)}(x)\cos\frac{n\pi x}{S}\Big|_0^S . \qquad (15)$$

Эта формула легко выводится интегрированием по частям, примененным n раз ($n=2k$ или $n=2k+1$), если n – степень многочлена $\Phi(x)$. Члены с производными нечетного порядка от функции $\Phi(x)$ выпадают, так как содержат множитель $\sin\frac{n\pi x}{S}$, обращающийся в нуль на концах отрезка интегрирования.

Домашнее задание. Задача 2

Методом Фурье найти решение линейного уравнения 2-го порядка гиперболического типа (9) с заданными начальными условиями (10) и заданными граничными условиями (11). Функции $g(x;t)$ в уравнении (9), $f(x)$ и $F(x)$ в начальных условиях (10), $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в граничных условиях (11) для каждого варианта задачи соответственно задаются в следующей таблице:

№ по пор.	$g(x;t)$	$f(x)$	$F(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
1	2	3	4	5	6
1	$\lambda\cdot\sin kt\times\frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	$\alpha\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	0	0
2	$\lambda\cdot\sin kt\times\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\beta\frac{x(S-x)(S-2x)}{S^3}$	0	0
3	0	$\alpha\cdot\frac{x}{S}$	$\beta\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\nu\cdot\cos\omega t$ $\underline{\alpha=\nu}$
4	0	$\alpha\frac{x(S-x)(S-3x)}{S^3}$	$\beta\frac{S-x}{S}$	$\mu\cdot\sin\omega t$ $\underline{\beta=\mu\omega}$	0
5	$\lambda\cdot e^{-t}\frac{x(S-x)}{S^2}$	$\alpha\frac{x(S-x)(S-2x)}{S^3}$	0	0	0
6	$\lambda\frac{x(S-x)}{S^2}$	$\alpha\frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	0	$\mu(1-\cos\omega t)$	0

1	2	3	4	5	6
7	$\lambda\frac{x(S-x)(S-2x)}{S^3}$	0	$\beta\cdot\frac{x}{S}$	0	$\gamma\cdot\sin\omega t$ $\beta=\gamma\omega$
8	$\lambda\frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	$\alpha\frac{S-x}{S}$	0	μ $\mu=\alpha$	0
9	$\lambda\frac{x(S-x)(3S-x)}{S^3}$	0	$\beta\frac{x(S+x)}{S^2}$	0	$\gamma\sin\omega t$ $\beta=0.5\gamma\omega$
10	$\lambda\frac{x(S-x)(2S-x)}{S^3}$	$\alpha\frac{S^2-x^2}{S^2}$	0	$\mu\cos\omega t$ $\alpha=\mu$	0
11	$\lambda\frac{x^2(S-x)(2S-x)}{S^4}$	0	$\beta\frac{x^2}{S^2}$	0	$\gamma\sin\omega t$ $\beta=\gamma\omega$
12	$\lambda\frac{x(S^2-x^2)}{S^3}$	$\alpha\frac{S^2-x^2}{S^2}$	0	μ $\alpha=\mu$	$\gamma(1-\cos\omega t)$
13	$\lambda\frac{x(S-x)(2S+x)}{S^3}$	0	$\beta\frac{S^2-x^2}{S^2}$	$\mu\sin\omega t$ $\beta=\mu\omega$	0
14	0	$\alpha\frac{x(S+x)}{S^2}$	$\beta\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\gamma\cos\omega t$ $\gamma=2\alpha$
15	0	$\alpha\frac{x(S^2-x^2)}{S^3}$	$\beta\frac{x^2(S-x)}{S^3}$	$\mu(1-\cos\omega t)$	0

1	2	3	4	5	6
16	0	$\alpha\frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	$\beta\frac{x}{S}$	0	$\gamma\sin\omega t$ $\beta=\gamma\omega$
17	0	$\alpha\frac{x(S-x)(2S+x)}{S^3}$	$\beta\frac{S-x}{S}$	$\mu\sin\omega t$ $\beta=\mu\omega$	0
18	0	$\alpha\frac{x(S-x)(3S+x)}{S^3}$	$\beta\frac{(S-x)^2}{S^2}$	$\mu\sin\omega t$ $\beta=\mu\omega$	0
19	0	$\alpha\frac{x^2(S^2-x^2)}{S^4}$	$\beta\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\gamma(1-\cos\omega t)$
20	$\lambda t\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\beta\frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	0	0
21	$\lambda t\frac{x(S-x)(2S-x)}{S^3}$	$\alpha\frac{x(S-x)^2}{S^3}$	0	0	0
22	$\lambda\cos\kappa t\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\beta\frac{x^2(S-x)}{S^3}$	0	0
23	$\lambda\cos\kappa t\frac{x(S^2-x^2)}{S^3}$	$\alpha\frac{x(S-x)(2S-x)}{S^3}$	0	0	0
24	$\lambda\sin\kappa t\frac{x^2(S-x)}{S^3}$	0	$\beta\frac{x(S-x)}{S^2}$	0	0

1	2	3	4	5	6
25	$\lambda t \frac{x^2(S-x)^2}{S^4}$	$\alpha \frac{x(S-x)(2S+x)}{S^3}$	0	0	0
26	$\lambda t \frac{x(S-x)(S-2x)}{S^3}$	0	$\beta \frac{x(S^2-x^2)}{S^3}$	0	0
27	$\lambda \cdot \frac{x}{S}$	$\alpha \frac{x(S-x)(S-3x)}{S^3}$	0	$\mu(1-\cos\omega t)$	0
28	$\lambda \frac{S-x}{S}$	0	$\beta \frac{x(S-2x)}{S^2}$	0	$-\nu\cdot\sin\omega t$ $\beta=\nu\omega$
29	0	$\alpha \frac{x}{S}$	$\beta \frac{x(S-x)}{S^2}$	0	$\nu\cdot\cos\omega t$ $\alpha=\nu$
30	0	$\alpha \frac{x(S^2-x^2)}{S^3}$	$\beta \frac{S-x}{S}$	$\mu\cdot\sin\omega t$ $\beta=\mu\omega$	0

ЗАДАЧА 3

Численное приближенное решение первой краевой задачи для уравнения распространения тепла в ограниченном стержне.

В уравнении теплопроводности для теплоизолированного по боковой поверхности ограниченного стержня длины S

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x;t)$$

всегда можно сделать преобразование независимых переменных

$$x = S\cdot y \quad , \quad t = \frac{S^2}{a^2}\cdot\tau \ ,$$

после которого уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_1(y;\tau)$$

с коэффициентом $a^2 = 1$. Длина стержня также равна 1 $(0 \le y \le 1)$. Свободный член уравнения изменяется

$$g_1(y;\tau) = \frac{S^2}{a^2}\cdot g\left(Sy\,;\frac{S^2}{a^2}\tau\right).$$

Соответственно видоизменяются функции в начальном и граничных условиях. Найдя решение задачи $u = u(y;\tau)$ в новых переменных, легко можно перевести его в решение, выраженное через старые переменные x, t, $u = u\left(\frac{x}{S};\frac{a^2}{S^2}t\right)$.

В дальнейшем рассматриваем только уравнения теплопроводности с $a^2 = 1$ и $S = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x;t). \tag{16}$$

Начальное распределение температур в стержне

$$u\big|_{t=0} = f(x) \ , \quad 0 \le x \le 1 \tag{17}$$

На концах стержня поддерживается заданная температура

$$u\big|_{x=0} = \varphi(t) \ , \quad u\big|_{x=1} = \psi(t), \quad t \ge 0. \tag{18}$$

1. Окончательная формула решения уравнения (16), удовлетворяющего начальному условию (17) и граничным условиям (18), записывается в виде ряда

$$u(x;t) = (1-x)\varphi(t) + x\cdot\psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \cdot e^{-n^2\pi^2 t} \times$$
$$\times \left\{ b_n + \frac{2\cdot(-1)^n}{n\pi}\psi(0) - \frac{2}{n\pi}\varphi(0) + \int_0^t e^{n^2\pi^2\tau}\cdot\left[g_n(\tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2(-1)^n}{n\pi}\psi'(\tau) - \frac{2}{n\pi}\varphi'(\tau)\right]d\tau \right\} , \tag{19}$$

где коэффициенты b_n и функции $g_n(\tau)$ вычисляются по формулам

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\cdot dx \ , \quad g_n(\tau) = 2\int_0^1 g(x;\tau)\sin n\pi x\cdot dx \tag{20}$$

Для получения приближенного численного решения задачи разбиваем отрезок $[0;1]$ на m малых равных частей длины (шага) h. В точках разбиения $x_k = k\cdot h \; (k=0,1,2\ldots,m)$ вычисляем "нулевую" строку таблицы решений из начального условия (17). Задавая числовые значения $t_j = \tau\cdot j \; (j=1,2\ldots)$ с малым промежутком τ между ними (шаг по t), вычисляем приближенно последующие строки таблицы решений, беря в решении по формуле (19) кроме первых двух слагаемых еще несколько первых слагаемых ряда, например четыре первых, отличных от нуля, члена.

Для примера зададим функции в правой части уравнения (16), в начальном условии (17) и граничных условиях (18) в виде

$$g(x;t)=36x(1-x)t,\; f(x)=x(1-x^4),\; \varphi(x)=60t,\; \psi(t)=0. \qquad (21)$$

По формулам (20) для заданных функций вычисляем

$$b_n=\frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3\cdot n^3}, \quad g_n(\tau)=\frac{144}{\pi^3\cdot n^3}\left[1-(-1)^n\right]\cdot\tau \; (n=1,2\ldots).$$

Решение задачи при заданных функциях (21) по формуле (19) представляется в виде

$$u(x;t)=(1-x)\cdot 60t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{\pi^3 n^3}\sin n\pi x\cdot\Big\{(-1)^{n+1}\cdot e^{-\pi^2 n^2 t}+\frac{12t}{\pi^2 n^2}\left[1-(-1)^n\right]-\left[\frac{12}{\pi^4\cdot n^4}-\frac{12(-1)^n}{\pi^4 n^4}+10\right]\cdot\left(1-e^{-\pi^2 n^2 t}\right)\Big\}.$$

Числовые значения этого решения с шагом $h=0,1$ по аргументу x вычислим для $t=0$ из начального условия и для задаваемого $t=0,005=3\cdot\frac{1}{600}$ по формуле

$$u(x;0,005)=0,3(1-x)+0,18216\sin\pi x-0,12637\cdot\sin 2\pi x-0,042207\sin 3\pi x-0,035761\cdot\sin 4\pi x+\left[-0,021045\sin 5\pi x-0,01698\sin 6\pi x\right],$$

ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда в решении задачи. Два первых из отбрасываемых членов (в скобках) в расчет не принимаются. Они выписаны для того, чтобы примерно пред-

ставлять точность приближения. Точность приближения 0,02. Коэффициенты при синусах подсчитаны из формулы решения задачи. Например,

$$A_1=\frac{12}{\pi^3}\left\{e^{-\pi^2\cdot 0,005}+\frac{24}{\pi^2}0,005-\left(\frac{24}{\pi^4}+10\right)\left(1-e^{-\pi^2\cdot 0,005}\right)\right\}=0,18216,$$

$$A_2=\frac{12}{8\pi^3}\left\{-e^{-4\pi^2\cdot 0,05}-10\left(1-e^{-4\pi^2\cdot 0,005}\right)\right\}=-0,12637$$

и т.д.

Таблица числовых значений решения задачи имеет вид:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$u(x;0)$	0	0,099	0,192	0,273	0,336
$u(x;005)$	0,3	0,1839	0,16573	0,24516	0,3378

0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0
0,3744	0,3583	0,3235	0,2681	0,1604	0

При вычислении значений тригонометрического многочлена с шагом $h=0,1$ рекомендуется выписать значения $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 54^\circ$, $\sin 72^\circ$ из таблиц, а также десятичные логарифмы синусов и коэффициентов. Произведения коэффициентов на значения синусов указанных аргументов следует записывать и сохранить запись. В процессе вычислений эти произведения встречаются повторно несколько раз со знаком плюс или минус как результат применения формул приведения для синуса.

2. В разностном методе или методе сеток для уравнения теплопроводности (16) область изменения независимых переменных $0\le x\le 1,\; 0\le t\le T$ разбивают на малые прямоугольники сеткой прямых $x=x_i=h\cdot i \; (i=0,1,2,\ldots,m)$ и прямых $t=t_j=\tau\cdot j \; (j=0,1,2,\ldots,p)$. Число $h \; (mh=1)$ называют шагом разбиения по аргументу x, а число $\tau \; (p\cdot\tau=T)$ – шагом

разбиения по аргументу t. Точки пересечения линий разбиения называют узлами сетки. Для получения численного решения задачи нужно найти числовые значения решения $u(x;t)$ в узлах сетки

$$u_{i,j} = u(x_i;t_j) = u(h\cdot i;\tau\cdot j)\quad (i=0,1,2,\dots,m;\ j=0,1,2,\dots,p).$$

Явная схема метода сеток получается при замене в уравнении теплопроводности (16) частных производных разностными отношениями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau},\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Уравнение (16) заменяется разностным уравнением

$$u_{i,j+1} = \frac{\tau}{h^2}\cdot u_{i+1,j} + \left(1-2\frac{\tau}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{\tau}{h^2}u_{i-1,j} + \tau\cdot g_{i,j} \qquad (22)$$

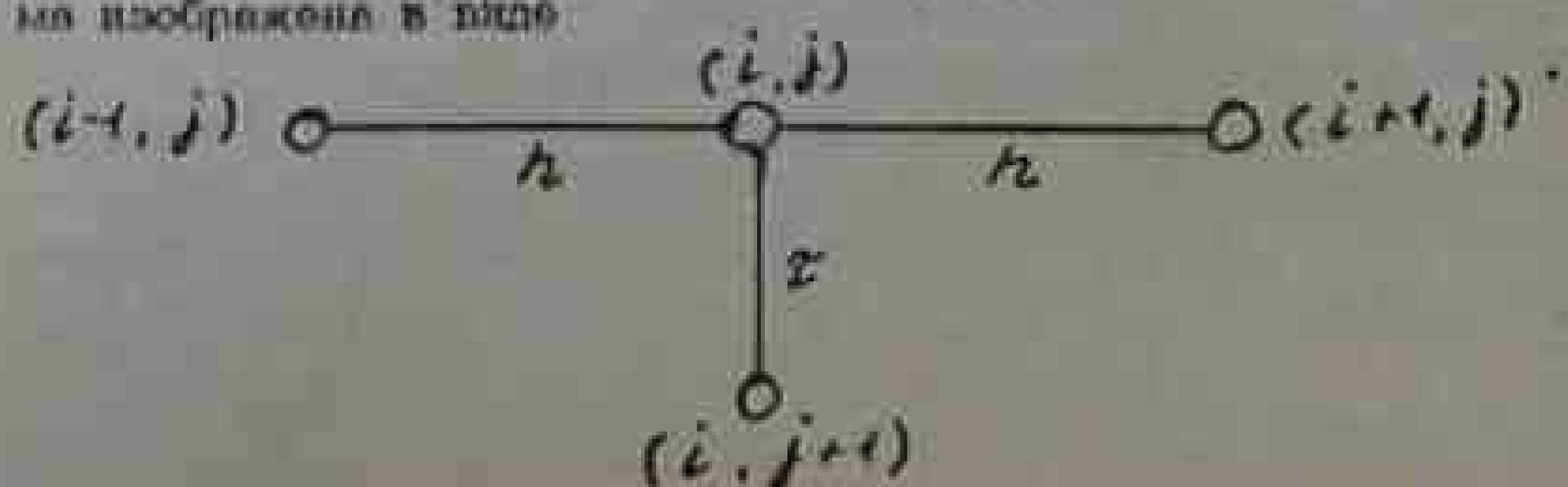
Числовые значения $u_{i,0}$ $(i=0,1,2,\dots,m)$ определяются из начального условия (17)

$$u_{i,0} = f(x_i) = f(h\cdot i) \qquad (23)$$

Значения решения $u_{0,j}$ и $u_{m,j}$ в крайних узлах сетки для каждого $j=1,2,\dots,p$ определяются из граничных условий (18) задачи

$$u_{0,j} = \varphi(t_j) = \varphi(\tau\cdot j),\quad u_{m,j} = \psi(t_j) = \psi(\tau\cdot j). \qquad (24)$$

Числа $\tau g_{i,j} = \tau\cdot g(h\cdot i;\tau\cdot j)$ при выбранных h и τ рассчитываются для заданного свободного члена $g(x;t)$ уравнения (16) и представляются отдельной вспомогательной таблицей. По формуле (22) можно последовательно вычислять числовые значения решения $u_{i,j+1}$ для $i=1,2,\dots,m-1$ через известные уже, вычисленные на предыдущем шаге, значения решения $u_{i+1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$ и величины $\tau\cdot g_{i,j}$. Геометрически схема изображена в виде



Вообще можно брать различные соотношения шагов h и τ в формуле (22), но устойчивое решение методом сеток для нашей схемы имеет место при условии $0 < \frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$. Ошибка аппроксимации, образующаяся в результате замены уравнения в частных производных (16) разностным уравнением (22), также зависит от отношения τ/h^2. Наименьшая ошибка имеет порядок h^4 при $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$. Получающаяся при этом формула наиболее употребительна

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left\{u_{i+1,j} + 4\cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}\right\} + \frac{h^2}{6}g_{i,j} \qquad (22')$$

Для примера с функциями (21) берем $h=0{,}1$ и, следовательно, $\tau = \frac{1}{600}$. Вычисляем вспомогательную таблицу чисел

$$\tau\cdot g_{i,j} = \tau\cdot 36\cdot h\cdot i(1-h\cdot i)\cdot\tau\cdot j = 10^{-6}\cdot i(10-i)\cdot j.$$

Ограничимся тремя строками $j = 0,1,2$. При этом для заданного примера первая строка состоит из нулей. Значения i следует брать от 1 до $m-1$ (9 в нашем примере), так как $g_{0,j}$ и $g_{m,j}$ в решении задачи не участвуют. Вспомогательная таблица чисел $\tau\cdot g_{i,j}$ имеет для рассматриваемого примера следующий вид:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tau\cdot g_{i,0}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tau g_{i,1}$	$10^{-6}\cdot 9$	$10^{-6}\cdot 16$	$10^{-6}\cdot 21$	$10^{-6}\cdot 24$	$10^{-6}\cdot 25$	$10^{-6}\cdot 24$	$10^{-6}\cdot 21$	$10^{-6}\cdot 16$	$10^{-6}\cdot 9$
$\tau\cdot g_{i,2}$	$10^{-6}\cdot 18$	$10^{-6}\cdot 32$	$10^{-6}\cdot 42$	$10^{-6}\cdot 48$	$10^{-6}\cdot 50$	$10^{-6}\cdot 48$	$10^{-6}\cdot 42$	$10^{-6}\cdot 32$	$10^{-6}\cdot 18$

Числовые значения решения задачи для примера с функциями (21) представлены следующей таблицей:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u_{i,0}$	0	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0
$u_{i,1}$	0,1	0,098	0,190	0,270	0,332	0,370	0,378	0,350	0,280	0,162	0
$u_{i,2}$	0,2	0,114	0,188	0,267	0,328	0,365	0,372	0,343	0,272	0,155	0
$u_{i,3}$	0,3	0,140	0,189	0,264	0,324	0,360	0,366	0,336	0,264	0,148	0

В первой строке таблицы записаны значения аргумента x, а во второй – значения $u_{i,0}$, вычисленные из начального условия. Вычисления по формуле (22') начинаются с третьей строки. Например,

$$u_{1,1} = \frac{1}{6}(u_{0,0} + 4u_{1,0} + u_{2,0}) + \tau \cdot g_{1,0} = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0{,}099 + 0{,}192) + 0 = 0{,}098,$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{6}(u_{1,0} + 4u_{2,0} + u_{3,0}) + \tau \cdot g_{2,0} = \frac{1}{6}(0{,}099 + 4 \cdot 0{,}192 + 0{,}273) + 0 = 0{,}190$$

и т.д. Вычислены три строки. Последняя соответствует значениям $u_{i,3} = u(0{,}1 \cdot i\,; 0{,}005)$. Сравнивая с соответствующими приближенными значениями $u(0{,}1 \cdot i\,; 0{,}005)$, вычисленными для решения методом Фурье, видим отклонения порядка 0,02 и более (для $u_{1,3}$ отклонение 0,04). Если же учесть значения первых двух отбрасываемых членов (в скобке) при решении по методу Фурье, то получим отклонения значительно меньшие. Следовательно, значения решения по методу сеток более точны, чем по методу Фурье с четырьмя первыми членами ряда.

Заметим, что в рассматриваемом примере на значения решения методом сеток очень мало влияли слагаемые $\tau \cdot g_{i,j}$. Это объясняется спецификой свободного члена $g(x;t)$ в данном примере и малостью рассмотренного отрезка времени $0 \le t \le 0{,}005$.

3. Неявная схема метода сеток для уравнения теплопроводности (16) получается при замене частных производных разностными отношениями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Уравнение в частных производных (16) заменяется аппроксимирующим разностным уравнением

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + g_{i,j}.$$

Обозначая для краткости $\omega = \frac{h^2}{\tau}$, представим разностное уравнение в виде

$$u_{i-1,j} - (2+\omega)u_{i,j} + u_{i+1,j} + \omega \cdot u_{i,j-1} + h^2 \cdot g_{i,j} = 0. \quad (25)$$

Начальная строка таблицы числовых значений решения задачи определяется из начального условия

$$u_{i,0} = f(x_i) = f(h \cdot i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m). \quad (23')$$

Из граничных условий определяются значения

$$u_{0,j} = \varphi(t_j) = \varphi(\tau \cdot j), \quad u_{m,j} = \psi(t_j) = \psi(\tau \cdot j) \quad (24')$$

для каждого значения $j = 1, 2, \ldots, p$. Зная значения решения в предыдущей строке таблицы с номером $j-1$, находят значения решения для последующей строки таблицы с номером j из системы линейных алгебраических уравнений (25) для $u_{1,j}, u_{2,j}, u_{3,j}, u_{4,j}, \ldots, u_{m-1,j}$. Это система специфического "трехдиагонального" вида, и решается методом прогонки. Система может быть преобразована к виду

$$u_{i,j} = a_{i,j}(b_{i,j} + u_{i+1,j}), \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad (26)$$

где вспомогательные величины $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ вычисляются последовательно по формулам

$$a_{1,j} = \frac{1}{2+\omega}, \quad b_{1,j} = \varphi(t_j) + \omega u_{1,j-1} + h^2 \cdot g_{1,j},$$

$$a_{2,j} = \frac{1}{2+\omega - a_{1,j}}, \quad b_{2,j} = a_{1,j} b_{1,j} + \omega u_{2,j-1} + h^2 g_{2,j},$$

– –

$$a_{i,j} = \frac{1}{2+\omega - a_{i-1,j}}, \quad b_{i,j} = a_{i-1,j} b_{i-1,j} + \omega u_{i,j-1} + h^2 \cdot g_{i,j},$$

– –

$$a_{m-1,j} = \frac{1}{2+\omega - a_{m-2,j}}, \quad b_{m-1,j} = a_{m-2,j} b_{m-2,j} + \omega u_{m-1,j-1} + h^2 g_{m-1,j}$$

Вычисление этих величин называют "прямым ходом". С помощью найденных величин и второго граничного условия задачи последовательно вычисляются значения решения для строки с номером j

$$
\begin{aligned}
&u_{m,j} = \psi(\tau \cdot j),\\
&u_{m-1,j} = a_{m-1,j}(b_{m-1,j} + u_{m,j}),\\
&\text{— — — — — — — — — —}\\
&u_{i,j} = a_{i,j}(b_{i,j} + u_{i+1,j}),\\
&\text{— — — — — — — — — —}\\
&u_{1,j} = a_{1,j}(b_{1,j} + u_{2,j}),\\
&u_{0,j} = \varphi(\tau \cdot j).
\end{aligned} \tag{28}
$$

Эти вычисления называют "обратным ходом" прогонки. Получают числовые значения решения задачи для строки с номером j. Для следующей строки процесс повторяется. Отметим, что числа $a_{i,j}$ фактически не зависят от номера j. Эти числа вычисляются один раз для всех строк. Числа $b_{i,j}$ для каждой строки вообще получаются различные. Строку чисел $a_{i,j}$ и каждую строку чисел $b_{i,j}$ при расчетах удобно включать в таблицу числовых значений решения $u_{i,j}$, причем строки чисел $b_{i,j}$ последовательно чередовать со строками чисел $u_{i,j}$. В эту же таблицу можно вписать и строки чисел $g_{i,j}$ или чисел $h^2 \cdot g_{i,j}$, которые входят слагаемыми в числа $b_{i,j}$. Для примера с функциями (21) методом прогонки вычислим одну строку чисел $u_{i,1}$, полагая $h = 0,1$ и $\tau = 3 \cdot \frac{1}{600} = 0,005$. Результаты вычислений составляют следующую таблицу:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$u_{i,0}$	0	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384
$h^2 g_{i,1}$	0	10^{-6} 162	10^{-6} 288	10^{-6} 378	10^{-6} 432	10^{-6} 450	10^{-6} 432
$a_{i,1}$	–	0,25	0,2667	0,2678	0,2679	0,2679	0,2679
$b_{i,1}$	–	0,4982	0,6088	0,6821	0,8551	0,9796	1,0808
$u_{i,1}$	0,3	0,1465	0,2077	0,2700	0,3258	0,3607	0,3666

0,7	0,8	0,9	1
0,357	0,288	0,171	0
10^{-6} 378	10^{-6} 288	10^{-6} 162	0
0,2679	0,2679	0,2679	–
0,9906	0,8417	0,5677	–
0,3368	0,2883	0,1521	0

В первой строке таблицы записаны абсциссы узлов сетки, во второй строке – числовые значения решения при $t = 0$, определяемые из начального условий задачи. В третьей строке записаны значения $h^2 g(x_i; t)$ для узлов сетки $x_i = h \cdot i$ при $h = 0,1$ и $t_1 = \tau = 0,005 = 3 \frac{1}{600}$. В четвертой и пятой строках записаны последовательно вычисленные значения числовых коэффициентов (27) "прямого хода". Например, $\left(\omega = \frac{h^2}{\tau} = 2\right)$

$$a_{1,1} = \frac{1}{2+2} = 0,25, \quad b_{1,1} = \varphi(t_1) + \omega \cdot u_{1,0} + h^2 g_{1,1} = = 0,3 + 2 \cdot 0,099 + 10^{-6} \cdot 162 = 0,4982,$$

$$a_{2,1} = \frac{1}{2+2-0,25} = 0,2667, \quad b_{2,1} = 0,26 \cdot 0,4982 + 2 \cdot \cdot 0,192 + 10^{-6} \cdot 288 = 0,6088.$$

В последней строке записаны числовые значения решения $u_{i,1}$ $(t_1 = \tau = 0,005)$, последовательно получаемые по формулам (28) "обратного хода". Например,

$$u_{10,1} = \psi(t_1) = 0, \quad u_{9,1} = 0,2679(0,5677 + 0) = 0,1521.$$

Сравнивая последнюю строку полученной таблицы с последней строкой таблицы метода сеток явной схемы, видим отклонения, не превосходящие 0,01 (для $u_{2,1}$ несколько больше). Это соответствует порядку ошибки аппроксимации метода сеток неявной схемы. Эта ошибка пропорциональна $(h^2 + \tau)$.

Домашнее задание. Задача 3

Для приведенного уравнения теплопроводности (16) с начальными условиями (17) и граничными условиями (18) найти численное приближенное решение с шагом $h=0,1$ по аргументу x для значения $t=0,005$. Решение получить тремя способами.

1) Методом Фурье найти решение первой краевой задачи и подсчитать приближенное решение, взяв 4 первых, отличных от нуля члена ряда.

2) Методом сеток явной схемы подсчитать таблицу приближенных числовых значений решения для $t_0=0$, $t_1=\frac{1}{600}$, $t_2=\frac{2}{600}$, $t_2=\frac{3}{600}$.

3) Методом сеток неявной схемы с применением метода прогонки подсчитать таблицу числовых значений решения для $t_0=0$ и $t_1=0,005$ и значения вспомогательных величин $h^2\cdot q_{i,1}$, $a_{i,1}$, $b_{i,1}$. Функции $q(x;t)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ для каждого варианта задачи представлены следующей таблицей:

№ по пор.	$q(x;t)$	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
1	2	3	4	5
1	$30x(1-x)$	$x^2(1-x)^2$	$30t$	0
2	$30x^2(1-x)^2$	$x(1-x)$	0	$60t$
3	$60x^2(1-x)$	$x(1-x)^2$	$90t$	0
4	$36x(1-x)^2$	$x(1-x)$	0	$90t$
5	$36x^2(1-x)t$	x	0	1
6	$72x(1-x)t$	$1-x$	1	0
7	$72x^2(1-x)^2t$	$2x$	0	2
8	$36x(1-x)^2t$	$2(1-x)$	2	0
9	$30x$	$x(1-x^2)$	$60t$	0
10	$30x^2$	$x(1-x)$	0	$60t$
11	$60(1-x)^2$	$x^2(1-x)$	$30t$	0
12	$36x^2\cdot t$	$x(1-x^2)$	0	$30t$
13	$36(1-x)^2t$	$3\cdot x$	0	3
14	$72xt$	$(1-x)^2$	1	0
15	$72x^2t$	$2x$	0	2
16	$60\cdot x(1+x)$	$2x(1-x^2)$	$60t$	0
17	$30\cdot x(2+x)$	$2x^2(1-x)$	0	$60t$
18	$90x(x-2)$	$3x(1-x)$	$30t$	0
19	$60x(x-3)$	$3x(1-x^2)$	0	$90t$
20	$90x(x-4)$	$3x\cdot(1-x)^2$	$45t$	0
21	$30x(1-x)(2+x)t$	$3x$	0	3
22	$60x(1-x)(2-x)t$	$2x$	0	2
23	$60x(1-x)(3+x)t$	$2(1-x)$	2	0
24	$30x(1-x)(3-x)t$	$3(1-x)$	3	0

1	2	3	4	5
25	$90x^2(1-x)t$	$(1-x)^2$	1	0
26	$60x$	$x^2(1-x^2)$	$30t$	0
27	$30(1+x)$	$x(1-x^2)$	0	$45t$
28	$60(1-x^2)$	$x(1-x)(2+x)$	$45t$	0
29	$30(1-x)(2+x)$	$x^2(1-x)$	0	$60t$
30	$60(1+x)(2-x)$	$x(1-x)(2-x)$	$90t$	0

Литература

1. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики. М., "Высшая школа," 1970.

2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1966.

3. И.Г. Араманович, В.И. Левин. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1964.

4. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. Численные методы анализа. М., "Физматгиз", 1963.

5. Н.В. Копченова, И.А. Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах. М., "Наука", 1972.

6. Б.И. Сегал, К.А. Семендяев. Пятизначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1962.